Varianta 1

SUBIECTUL I

a) $AC = 3$.

b) $S_{ABC} = \frac{9}{2}$.

c) Se verifică : $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci punctele A, B, D sunt coliniare.

d) Deoarece $13^2 = 12^2 + 5^2$ triunghiul MNP este dreptunghic.

e) $\sin^3 30^\circ = \frac{1}{8}$.

f) $2 \cdot i^2 + 4 \cdot i^4 = 2$.

SUBIECTUL II

1.

a) $2 + 2^3 + 2^5 + 2^7 = 170$.

b) $g(x) = x + 2$ şi $g(1) = 3$.

c) $T_3 = 40a^2$.

d) $x \in \{-1, 1\}$.

e) $x = 2$.

2.

a) Prin calcul direct obținem $f(2) = \frac{7}{2}$.

b) $\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{17}{4}$.

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

d) $\int_1^e \left(x^2 - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{e^3 - 4}{3}$.

e) $x^2 \cdot f'(x) - 2x \cdot f(x) = 3$.

SUBIECTUL III

a) $f(0) = 2$.

b) $f(2) + f(3) + \ldots + f(11) = 85$.

c) $f^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = x - 2$.

d) Se obține prin calcul direct.

e) Notăm $P(n)$: $f_n(x) = x + 2n,\ n \in \mathbf{N}^*,\ x \in \mathbf{R}$.

Pentru $n = 1$ obținem $f_1(x) = x + 2$, adevărat .

Presupunând că $P(k)$: $f_k(x) = x + 2k,$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $P(k+1)$: $f_{k+1}(x) = x + 2(k+1),$ este adevărată.

Dar $f_{k+1}(x) = = \underbrace{(f \circ f \circ \ldots \circ f)}_{de\ k\ ori\ f} \circ f(x) = f(x) + 2k = x + 2(k+1)$. Deci $P(k+1)$ este adevărată. Ambele etape fiind verificate, $\Rightarrow \forall\, n \in \mathbf{N}^*, \forall\, x \in \mathbf{R}$, $f_n(x) = x + 2n$.

f) Notăm $P(n)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_n(0) & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}^*$.

$P(1)$ adevărată şi presupunând că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_k(0) & 1 \end{pmatrix}$ este adevărată pentru $k \in \mathbf{N}^*$, arătăm că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_{k+1}(0) & 1 \end{pmatrix}$.

Dar $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_n(0) & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_{n+1}(0) & 1 \end{pmatrix}$. q.e.d.

Ambele etape fiind verificate, concluzionăm că $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ f_n(0) & 1 \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbf{N}^*$.

g) $f_1(1) + f_2(1) + \ldots + f_n(1) = \sum_{k=1}^{n} f_k(1) \overset{e)}{=} \sum_{k=1}^{n} (1 + 2k) = n + n(n+1) = n^2 + 2n$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$.

b) $\int_0^1 x \cdot f'(x)dx = \int_0^1 x(3x^2 + 2x + 1)dx = \frac{23}{12}$.

c) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 + x^2 + x - 1}{x^3} = 1$.

d) $\lim_{x\to\infty} f(e^{-x}) = \lim_{x\to\infty} (e^{-3x} + e^{-2x} + e^{-x} - 1) = 0 + 0 + 0 - 1 = -1$.

e) $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbf{R}$, deci f este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

f) Din punctul e) $\Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbf{R} \Rightarrow \forall x \geq 0$ avem $f(x) \geq f(0) = -1$.

g) $\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{f(x) + f(-x)}{x^2} dx = \left(2x + \frac{2}{x}\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} = 0$.